COLLEGE LIBRARY

Physikalische Zeitschrift

Begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

Herausgeber:
Professor Dr. **M. Born** und
Professor Dr. **P. Debye**

Schriftleiter:
Dr. **Erich Hückel** in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von jährlich 300 Mark, bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband 450 Mark, im Ausland je nach dem Valutastande. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 9.— Mk., Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

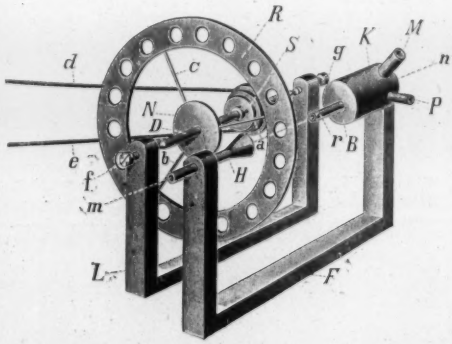
Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten entweder an die Herausgeber: Professor Dr. M. Born, Göttingen, Planckstraße 21, und Professor Dr. P. Debye, Zürich, Physikgebäude, Gloriastr. 35 oder an die Schriftleitung: Dr. Erich Hückel, Göttingen, Bunsenstraße 9, Physikalisches Institut der Universität, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 17. 1. September 1922. No. 621. **23. Jahrgang.**

Phys.-mech. Institut von Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn,

München.



Normal-Sirene

zur

rationellen Messung von Tonstärken.

Katalog 30 erschienen und ebenso wie Spezialliste No. 29 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate gratis und franko.

Inhaltsverzeichnis:

Seite

Dielektrizitätskonstanten: Zur Bestimmung der — im elektromagnetischen Spektrum ungedämpfter Schwingungen, v. K. Theodortschick 344
Elektrodynamische Theorie: Über einen Widerspruch zwischen der — und der relativistischen Theorie der elektromagnetischen Masse, v. E. Fermi . . 340
Elektromagnetische Masse: Über einen Widerspruch zwischen der elektrodynamischen und der relativistischen Theorie der —, v. E. Fermi 340
Emde, F., Das elektrische Feld des Transformators 347
Fermi, E., Über einen Widerspruch zwischen der elektrodynamischen und der relativistischen Theorie der elektromagnetischen Masse 340
Goldhammer, Alex.: „Magnetische Permeabilität eines künstlichen magnetischen Mediums, Bemerkung hierzu von H. Maurer 346
Gravitationsfeld: „Ruhmasse" und „Masse der Bewegung" im statischen Gravitationsfelde, v. G. Jaffé . . . 337
Jaffé, G., „Ruhmasse" und „Masse der Bewegung" im statischen Gravitationsfelde 337
Kristallanalyse: Optischer Demonstrationsversuch zum Braggschen Verfahren der — durch Röntgenstrahlen, v. B. Quarder 350
Masse der Bewegung: „Ruhmasse" und „—" im statischen Gravitationsfelde, v. G. Jaffé 337
Maurer, H., Bemerkung zu dem Aufsatz: „Magnetische Permeabilität eines künstlichen magnetischen Mediums von Alex. Goldhammer" 346
Medium: Bemerkung zu dem Aufsatz: „Magnetische Permeabilität eines künstlichen magnetischen — von Alex. Goldhammer", v. H. Maurer 346
Permeabilität: Bemerkung zu dem Aufsatz: „Magnetische — eines künstlichen magnetischen Mediums von Alex. Goldhammer", v. H. Maurer . . . 346
Quarder, B., Optischer Demonstrationsversuch zum Braggschen Verfahren der Kristallanalyse durch Röntgenstrahlen 350

Seite

Relativistische Theorie: Über einen Widerspruch zwischen der elektrodynamischen und der — der elektromagnetischen Masse, v. E. Fermi 340
Röntgenstrahlen: Optischer Demonstrationsversuch zum Braggschen Verfahren der Kristallanalyse durch —, v. B. Quarder 350
„Ruhmasse" und „Masse der Bewegung" im statischen Gravitationsfelde, v. G. Jaffé 337
Schwingungen: Zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten im elektromagnetischen Spektrum ungedämpfter —, v. K. Theodortschick 344
Spektrum: Zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten im elektromagnetischen — ungedämpfter Schwingungen, v. K. Theodortschick 344
Theodortschick, K., Zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten im elektromagnetischen Spektrum ungedämpfter Schwingungen 344
Transformator: Das elektrische Feld des —, v. F. Emde 347

Verlag von **Carl Fromme G. m. b. H., Leipzig u. Wien.**

Erklärung der Gravitation, der Molekularkräfte, des Lichtes, der magnetischen und elektrischen Erscheinungen auf rein mechanischem atomistischem Wege

von

Prof. Dr. **Johann Sahulka**

Preis M. 40.—.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.

Für Stickstoffwerk Oppau

junge promovierte Experimentalphysiker

mit Assistentenpraxis gesucht. Bewerbungsschreiben mit Referenzen an

Badische Anilin- u. Sodafabrik Hauptlaboratorium Ludwigshafen a. Rh.

Ingenieur-Physiker Dr. phil.

mit gründlichen Fachkenntnissen und guter Allgemeinbildung, Studium an Techn. Hochschule und Universität, mit längerer Werkstattpraxis im allgemeinen Maschinen- und elektrischen Apparatebau, sowie mehrjähriger Laboratoriumstätigkeit in moderner physik.-elektrischer Meßtechnik, energisch und pflichtgetreu, an sehr exaktes, strenges Arbeiten gewöhnt, sucht baldmöglichste Stellungsänderung in elektro-physikalischem Laboratorium, Elektro-Fabrik oder in Elektrizitätswerk. Beste Zeugnisse und Referenzen. Offerten unter **S. H. 608** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) Leipzig, Königstraße 2.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 17. 1. September 1922. 23. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 19 am 10. September 1922.

INHALT:

Originalmitteilungen:

G. Jaffé, „Ruhmasse" und „Masse der Bewegung" im statischen Gravitationsfelde. S. 337.

E. Fermi, Über einen Widerspruch zwischen der elektrodynamischen und der relativistischen Theorie der elektromagnetischen Massen. S. 340.

K. Theodortschick, Zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten im elektromagnetischen Spektrum ungedämpfter Schwingungen. S. 344.

H. Maurer, Bemerkung zu dem Aufsatz: „Magnetische Permeabilität eines künstlichen magnetischen Mediums von Alex. Goldhammer". S. 346.

F. Emde, Das elektrische Feld des Transformators. S. 347.

B. Quarder, Optischer Demonstrationsversuch zum Braggschen Verfahren der Kristallanalyse durch Röntgenstrahlen. S. 350.

Personalien. S. 352.

Gesuche. S. 352.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

„Ruhmasse" und „Masse der Bewegung" im statischen Gravitationsfelde.

Von George Jaffé.

Die Veränderlichkeit der Masse im Gravitationsfelde ist eine der Grundtatsachen der allgemeinen Relativitätstheorie. Dennoch besteht in der Literatur keine Übereinstimmung darüber, wie im einzelnen Fall die Abhängigkeit der Masse von den Gravitationspotentialen in Rechnung zu setzen ist. Das möge zuerst an einem einfachen Beispiel gezeigt werden.

Es bestehe ein statisches Gravitationsfeld; in einem Teil desselben sei die Maßbestimmung mit hinreichender Genauigkeit pseudoeuklidisch. Ferner sei ein kleiner Probekörper gegeben, dessen Rückwirkung auf das Feld vernachlässigt werden kann; seine Masse sei m_0, wenn er in einem pseudoeuklidischen Teil des Feldes ruht oder langsam bewegt wird. Wie groß ist seine träge Masse m — genauer gesprochen: seine „Masse der Bewegung"[1]) für kleine Geschwindigkeiten —, wenn er in einen Teil des Feldes gebracht wird, in dem das Linienelement den Ausdruck:

$$ds^2 = -A\,((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) + B\,(dx^4)^2$$

hat? Dabei wird vorausgesetzt, daß nunmehr A und B mit hinreichender Genauigkeit als konstant angesehen werden können.

Einstein[2]) beantwortet die Frage in seiner kosmologischen Arbeit; unter Einschränkung auf den Fall $\sqrt{A^3 B} = 1$ ist nach ihm:

$$m = m_0 \frac{A}{\sqrt{B}} \qquad (1\,a)$$

zu setzen. Bei seiner Berechnung geht Einstein von den kovarianten Impulskomponenten aus.

Dagegen legt v. Laue[1]) die kontravarianten Impulskomponenten zugrunde und findet demgemäß für ein beliebiges statisches Feld $m = m_0 \sqrt{g_{44}}$, also in unserem Falle:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{B}}. \qquad (1\,b)$$

Thirring[2]) endlich ermittelt, wie die Trägheitswirkungen im Innern (und nahe dem Zentrum) einer Hohlkugel von der Masse dieser Hohlkugel abhängen, indem er die Zentrifugal- und Corioliskraft berechnet. Führen wir die Rechnung genau wie Thirring, indem wir von den kontravarianten Bewegungsgleichungen ausgehen, so finden wir als Antwort auf unsere Frage:

$$m = m_0{}^3). \qquad (1\,c)$$

1) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. 3. Aufl., S. 566. Braunschweig 1922.

2) A. Einstein, Berl. Ber. 1917, S. 142. Auch abgedruckt in der Sammlung „Das Relativitätsprinzip".

1) M. v. Laue, Die Relativitätstheorie, II. Band, S. 165. Braunschweig 1921.

2) H. Thirring, diese Zeitschr. 19, 33, 1918 und Nachtrag diese Zeitschr. 22, 29, 1921; man vergleiche die Bemerkung im Anschluß an Formel (27).

3) Diese Angabe steht im Widerspruch mit Thirrings eigenen Ergebnissen. Beschränkt man sich nämlich auf den Fall der ruhenden Hohlkugel und setzt

$$1 + \frac{2kM}{a} = A$$

(wo k die Gravitationskonstante, M die Masse und a den Halbmesser der Kugel bedeutet), so wäre nach Formel (27) (l. c. S. 39) in unserer Bezeichnung zu setzen

$$m = m_0 A. \qquad (1\,d)$$

Der Widerspruch klärt sich so auf, daß in der Rechnung, die bei Thirring zu den Formeln (25) bis (27) führt (auch in der korrigierten Form, diese Zeitschr. 22, 29, 1921), noch ein Rechenfehler enthalten ist. Die in Gleichung (18) enthaltene Vereinfachung ist zwar zulässig, solange mit den $g_{\mu\nu}$ aus Gleichung (16) gerechnet wird, nicht aber nach der Substitution (23), weil dann nicht mehr alle $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}$ kleine Größen sind.

Bei korrekter Rechnung fällt der Faktor A auf der rechten Seite von (27) fort, und das führt dann nach

Dieses Beispiel wird beweisen, daß es nicht überflüssig ist, die Frage aufzuwerfen, wie die in der speziellen Relativitätstheorie völlig eindeutigen Begriffe „Ruhmasse" und „Masse der Bewegung" auf die allgemeine Relativitätstheorie zu übertragen sind.

Es kann gar nicht zweifelhaft sein, daß man dabei vom Impulssatz auszugehen hat, zeigen doch schon die Verhältnisse in der speziellen Relativitätstheorie, daß es unzweckmäßig ist, die Definition der Masse eines bewegten Körpers auf die Beschleunigung zu gründen.

Wir knüpfen darum an die von Einstein gegebenen, aus dem Energieimpulssatz abgeleiteten Ausdrücke für Impuls und Energie eines isolierten Systems an[1]). Demzufolge ist:

$$J_i = \int \mathfrak{U}_i^0 \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3, \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (2)$$

wo die $\mathfrak{U}_i^k$ sich additiv aus den Energiekomponenten der Materie $\mathfrak{T}_i^k$ und denen des Gravitationsfeldes $\mathfrak{t}_i^k$ zusammensetzen:

$$\mathfrak{U}_i^k = \mathfrak{T}_i^k + \mathfrak{t}_i^k. \qquad (2a)$$

Die Größen J_1, J_2, J_3 bilden die (negativen) Impulskomponenten, J_4 die Energie des Systems unter der Annahme, daß dieses eine Weltröhre durchzieht, außerhalb deren die Maßbestimmung konstante Koeffizienten hat. Es wird eine solche Koordinatenwahl vorausgesetzt, daß die Räume $x^4 =$ konst. endliche Querschnitte aus der Weltröhre herausschneiden; die Integration in (2) ist über einen solchen Querschnitt zu erstrecken.

Die Formeln (2) lassen sich ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen, sofern sich der Querschnitt der Röhre so wählen läßt, daß seine Dimensionen groß gegen diejenigen des Probekörpers sind und zugleich klein gegen diejenigen Abmessungen, in denen sich das Feld merklich ändert. Energie und Impuls werden dann Funktionen der Zeit allein. Schon Weyl[2]) hat im Rahmen seiner Theorie diese Verallgemeinerung der Einsteinschen Formeln vorgenommen.

Man gelangt zu den Verhältnissen der speziellen Relativitätstheorie, wenn man:

$$\mathfrak{T}_i^k = \mu u_i u^k, \qquad \left(u^i = \frac{\partial x^i}{ds}\right), \qquad (3)$$

setzt, wo die Ruhmassendichte μ auf Grund der Substanzvorstellung der Materie mit dem invarianten Massenelement dm_0 durch die Beziehung:

$$dm_0 \, ds = \mu \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3 \, dx^4 \qquad (3a)$$

verknüpft ist[1]).

Ferner muß angenommen werden, daß die $g_{\mu\nu}$ überall ihre konstanten Normalwerte haben, d. h. mit anderen Worten: die Rückwirkung des Teilchens auf das Feld wird vernachlässigt. Daraus folgt dann:

$$\mathfrak{t}_i^k = 0. \qquad (4)$$

Da wir hier nicht einen Beitrag zur Theorie der Materie liefern, sondern nur Begriffe der speziellen Relativitätstheorie sinngemäß erweitern wollen, soll an dem Ansatz (3) und (3a) festgehalten werden. Ferner läßt sich nach unserer Annahme über die Abmessungen des Probekörpers um ihn ein Bereich abgrenzen, in dem die $g_{\mu\nu}$ des äußeren Feldes als konstant angesehen werden können; beschränken wir uns also vorübergehend auf eine solche Umgebung, so liegen die Verhältnisse genau wie in der speziellen Relativitätstheorie, mit dem einzigen Unterschiede, daß die $g_{\mu\nu}$ nicht die pseudoeuklidischen Normalwerte, sondern die durch das äußere Feld vorgeschriebenen Werte haben. Vernachlässigen wir also wiederum die Rückwirkung des Teilchens auf das Feld, so gelten auch wieder die Gleichungen (4).

Nehmen wir nun endlich noch an, daß alle Massenelemente des Probekörpers die gemeinsame Geschwindigkeit u^i haben, so ergibt sich aus den Gleichungen (2), (2a), (3), (3a) und (4) für Impuls und Energie:

$$J_i = m_0 u_i = m_0 g_{ik} u^k. \qquad (5)$$

Hier ist nun die Beziehung auf die engere Umgebung des Teilchens verschwunden, da u^i ein Vektor in einem beliebigen Koordinatensystem ist.

Nunmehr beschränken wir die Betrachtung auf statische Gravitationsfelder. Es soll also sein:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= -d\sigma^2 + g_{44}\, dt^2, \\ d\sigma^2 &= \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k, \qquad i, k = 1, 2, 3, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

wo g_{44} und die γ_{ik} nicht von der Zeit abhängen. Damit ist eine kosmische Zeit t eindeutig — bis auf Nullpunkt und Zeitmaßstab — fest-

---

Thirrings Schlußweise zu der im Text gegebenen Beziehung (1c). Demnach wäre also die träge Masse eines Massenpunktes im Innern der Hohlkugel von der Masse der letzteren unabhängig, und schon daraus folgt, daß der Thirringsche Ansatz für die Berechnung der Trägheitswirkungen ungeeignet ist. Es muß übrigens betont werden, daß die Berechnung der Massenveränderlichkeit im Innern der Hohlkugel nur ein völlig nebensächlicher Punkt in der Thirringschen Untersuchung ist. Ihr wesentliches Resultat: das Auftreten von Zentrifugal- und Corioliskräften im Innern der rotierenden Hohlkugel, bleibt von den vorstehenden Bemerkungen durchaus unberührt. Wollte man die kovarianten Komponenten der Zentrifugal- und Corioliskraft als maßgebend für die Trägheitswirkung ansehen, so würde man zu der Beziehung (1d) gelangen, die sich von (1c) in derselben Weise unterscheidet, wie (1a) von (1b).

1) A. Einstein, Berl. Ber. 1918, S. 448.

2) H. Weyl, Ann. d. Phys. **65**, 541, 1921; Raum, Zeit, Materie, 4. Aufl., S. 273. Berlin 1921.

1) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 4. Aufl., S. 201.

gelegt[1]). Über die Zeiteinheit verfügen wir so, daß in pseudoeuklidischen Teilen des Feldes die Lichtgeschwindigkeit den Wert 1 haben soll, so daß zwischen Masse und Energie nicht unterschieden zu werden braucht.

Es ist vielleicht nicht überflüssig darauf hinzuweisen, daß die kosmische, oder besser gesagt „statische" Zeit t eine physikalische Bedeutung hat, obgleich sie nur von solchen Uhren als Eigenzeit angezeigt wird, die in pseudoeuklidischen Teilen des Feldes ruhen. Die statische Zeit ist diejenige Zeit, welche aus den Bewegungen freier Massenpunkte auf Grund des Gesetzes (6) errechnet werden kann, genau wie die klassische Astronomie aus den Bewegungen der Himmelskörper und dem Newtonschen Attraktionsgesetze die für sie maßgebende „absolute" Zeit errechnet. Geschwindigkeiten, welche durch Differentiation nach der kosmischen Zeit gemessen werden, haben also innerhalb des betrachteten statischen Systems durchaus physikalische Bedeutung.

Die Gruppe von Transformationen, die wir nach dem Gesagten fernerhin zulassen, besteht aus den Transformationen, die den Raum in sich überführen und t ungeändert lassen. Größen, welche gegenüber dieser Gruppe invariant sind, wollen wir statische Invarianten nennen. Die Lichtgeschwindigkeit im statischen Schwerefelde $V = \sqrt{g_{44}}$, gemessen in natürlichen Längeneinheiten und kosmischer Zeit, ist eine statische Invariante, gemessen in Eigenzeit hat sie bekanntlich überall den Wert 1.

Nach dieser Zwischenbemerkung gehen wir zur Berechnung von Impuls und Energie unseres Probekörpers im statischen Schwerefelde über. Die Beschränkung auf statische Felder ist für das Folgende wesentlich, sie ist aber für unsere Fragestellung nicht sehr schwerwiegend. Denn wenn ein Schwerefeld mit Hilfe eines Probekörpers auf seine Schwerewirkungen untersucht werden soll, liegt es nahe, das Feld als zeitlich unveränderlich anzunehmen.

Ersetzen wir in (5) die Differentiationen nach s vermöge (6) durch solche nach t, so finden wir endgültig:

$$J_i = \frac{m_0 \gamma_{ik} \dfrac{dx^k}{dt}}{\sqrt{g_{44} - \left(\dfrac{d\sigma}{dt}\right)^2}}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{7}$$

$$J_4 = \frac{m_0 g_{44}}{\sqrt{g_{44} - \left(\dfrac{d\sigma}{dt}\right)^2}}. \tag{8}$$

1) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. 4. Aufl., S. 218.

Gleichung (8) ergibt die Verallgemeinerung des bekannten Ausdrucks der speziellen Relativitätstheorie für die Energie eines bewegten Teilchens von der Ruhmasse m_0; dabei ist $\frac{d\sigma}{dt}$ der Betrag der in natürlichen Längeneinheiten und kosmischer Zeit gemessenen Geschwindigkeit, eine statische Invariante.

Befindet sich das Teilchen in Ruhe, so erhält man den Ausdruck:

$$m_0^* = m_0 \sqrt{g_{44}}. \tag{9}$$

Die Größe m_0^* gibt also die Masse (bzw. Energie) eines Teilchens an, wenn es in einem statischen Gravitationsfelde an einer Stelle ruht, wo die Lichtgeschwindigkeit den Wert $V = \sqrt{g_{44}}$ hat; wie diese ist m_0^* eine statische Invariante, die wir demgemäß als „statische Masse" bezeichnen wollen. Davon zu unterscheiden ist die eigentliche „Ruhmasse" m_0, in welche die statische Masse nur dort übergeht, wo die Lichtgeschwindigkeit ihren normalen Wert 1 hat. Wir erklären also als Ruhmasse eines Körpers die Masse in einem solchen Koordinatensystem, in dem der Körper ruht, und welches zudem für die Nachbarschaft des Körpers pseudoeuklidische Maßbestimmung hat. Nur die so definierte Ruhmasse, nicht aber die statische Masse, ist eine Invariante gegen beliebige Transformationen.

Die damit eingeführte Unterscheidung ist nicht daran gebunden, daß man der Definition der Masse die Substanzvorstellung zugrunde legt, wie wir es mit Gleichung (3a) getan haben. Auch wenn man im Anschluß an Weyl[1]) die Masse als Feldfluß erklärt, erhält man die Ruhmasse m_0 bzw. die statische Masse Vm_0, je nachdem man den Probekörper in eine Umgebung eingebettet sein läßt, in der die Lichtgeschwindigkeit den Wert 1 oder V hat. In letzterem Falle ist die Schwarzschildsche Lösung für das zentralsymmetrische Feld so abzuändern, daß ihr g_{44} mit V^2 multipliziert wird. Bei Berücksichtigung des Umstandes, daß J_4 für einen im statischen Felde ruhenden Körper die statische Masse mißt, verschwindet auch — zum mindesten unter den oben angegebenen Einschränkungen, d. h. also für hinreichend kleine Körper — ein Widerspruch, auf den Weyl gelegentlich hingewiesen hat[2]).

Wenden wir uns nunmehr dem Impuls zu, so liegt es nahe, als „Masse der Bewegung" diejenige Größe zu erklären, welche mit den

1) H. Weyl, Ann. d. Phys. **65**, 541, 1921; Raum, Zeit, Materie. 4. Aufl., S. 247.
2) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. 3. Aufl., S. 235. 4. Aufl., S. 248.

kontravarianten Geschwindigkeitskomponenten multipliziert die physikalisch bedeutsamen (also kovarianten) Impulskomponenten ergibt. Die Formeln (7) zeigen, daß auf Grund dieser Erklärung die Masse der Bewegung im statischen Schwerefelde nicht mehr durch einen Skalar charakterisiert wird, sondern durch einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe im Streckenraum mit den kovarianten Komponenten:

$$m_{ik} = \frac{m_0 \gamma_{ik}}{\sqrt{g_{44} - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2}} \,. \qquad (10)$$

Daß die träge Masse im statischen Felde in verschiedenen Richtungen verschiedene Werte hat, wurde in einem speziellen Fall bereits bei früherer Gelegenheit bemerkt[1]). In pseudoeuklidischer Umgebung geht (10) in den bekannten Skalar der speziellen Relativitätstheorie über. Dagegen ist zu beachten, daß m_{ik} für unendlich kleine Geschwindigkeiten

$$\left(\frac{d\sigma}{dt} = 0\right) \,,$$

im allgemeinen ein Tensor und demnach von der skalaren „statischen Masse" m_0^* verschieden bleibt.

Beschränken wir uns auf kleine Geschwindigkeiten und den in der Einleitung gekennzeichneten speziellen Fall, so ist unsere Formel (10) nur mit dem Einsteinschen Werte (1a) in Übereinstimmung, und auch da besteht noch der Unterschied, daß nach unserer Rechnung die Formel (1a) für beliebige Werte der Determinante $\sqrt{A^3 B}$ gilt. Dieser Unterschied klärt sich so auf, daß Einstein nicht von den Ausdrücken (5), sondern von den entsprechenden Ausdrücken für Impuls- und Energiedichte — im Weylschen Sinne — ausgeht. Seine Formeln sind darum noch durch die Wurzel aus der Determinante zu dividieren — was natürlich bei der Beschränkung auf den Fall $\sqrt{A^3 B} = 1$ ohne Belang ist — und gelten dann allgemein.

Das Verfahren, welches Thirring zur Berechnung der Massenveränderlichkeit benutzt, ist für diesen Zweck ungeeignet, weil es von der Gleichung für die Beschleunigung — zudem in kontravarianter Form — und nicht von derjenigen für den Impuls ausgeht. Was endlich die v. Lauesche Formel (1b) betrifft, so empfiehlt sie sich dadurch, daß die „Masse der Bewegung" ein Skalar wird; trotzdem möchten wir glauben, daß nur die Darstellung (10) den Sachverhalt völlig wiedergibt, weil nur sie sich auf diejenigen Impulskomponenten stützt, über welche der Impulssatz etwas aussagt. So wäre es doch auch in der klassischen Mechanik ungewöhnlich, als Impulskomponente in Richtung einer Winkelkoordinate φ den Ausdruck $m_0 \dot{\varphi}$ anzusprechen[1]).

Schließt man sich dagegen der Darstellung (10) an, so wird dadurch allerdings auch eine veränderte Auffassung des Massenbegriffs in der gewöhnlichen Mechanik nahegelegt. Bei der Wahl von beliebigen krummlinigen Koordinaten würde der Tensor:

$$m_{ik} = m_0 \gamma_{ik} \qquad (11)$$

als „verallgemeinerte Masse" neben die verallgemeinerten Koordinaten und Kräfte treten. Wir können aber hierin nichts sehen, was unserer Auffassung widerspräche. Wählt man z. B. Zylinderkoordinaten $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$, so tritt als m_{22}-Komponente in durchaus sinngemäßer Weise das Trägheitsmoment $m_0 r^2$ auf.

1) G. Jaffé, Ann. d. Phys. **67**, 212, 1922.

1) Man vergleiche auch die Begründung, die Einstein (Berl. Ber. 1914, S. 1060 Anm.) dafür gibt, daß nur den kovarianten Impulskomponenten physikalische Bedeutung zuzuschreiben ist.

Leipzig, Juni 1922.

(Eingegangen 4. Juli 1922.)

Über einen Widerspruch zwischen der elektrodynamischen und der relativistischen Theorie der elektromagnetischen Masse.

Von Enrico Fermi.

1. Bekanntlich führen einfache elektrodynamische Betrachtungen[1]) zum Werte $\frac{4}{3}\frac{U}{c^2}$ für die elektromagnetische Masse einer sphärischen Elektrizitätsverteilung von der elektrostatischen Energie U, wenn c die Geschwindigkeit des Lichtes bedeutet. Andererseits ergeben bekanntlich relativistische Betrachtungen für die Masse eines, die Energie U enthaltenden Systemes den Wert $\frac{U}{c^2}$. Wir stehen also vor einem Widerspruch zwischen den beiden Auffassungen, den aufzuklären mir nicht unwichtig scheint, besonders mit Rücksicht auf die große Wichtigkeit, welche die elektromagnetische Masse für die allgemeine Physik als Grundlage der Elektronentheorie der Materie besitzt.

Insbesondere werden wir beweisen: Die Verschiedenheit zwischen den zwei Werten rührt daher, daß man in der gewöhnlichen elektro-

1) M. Abraham, Theorie der Elektrizität; Lorentz, The theory of electrons, S. 37; Richardson, Electron Theory of matter, Chapter XI.

dynamischen Theorie der elektromagnetischen Masse, wenn auch nicht explizit, einen relativistisch unzulässigen Begriff vom starren Körper anwendet. Dagegen führt der relativistisch natürlichste und berechtigtste Begriff vom starren Körper zum Werte $U:c^2$ für die elektromagnetische Masse.

Wir bemerken noch, daß die relativistische Dynamik des Elektrons von M. Born[1]) studiert wurde, aber von einem Standpunkt, der sich nur teilweise von dem gewöhnlichen elektrodynamischen unterschied, so daß für die Elektronenmasse natürlich der Wert $\frac{4}{3}\frac{U}{c^2}$ gefunden wurde.

In dieser Arbeit wird uns als Grundlage das Hamiltonsche Prinzip dienen, als das zweckmäßigste für die Behandlung eines sehr komplizierten Bedingungen unterworfenen Problems, Bedingungen, die von anderer Natur sind, als die in der gewöhnlichen Mechanik betrachteten, weil sich unser System nach der Relativitätstheorie in der Richtung seiner Bewegung zusammenziehen muß. Wir bemerken aber, daß obwohl diese Zusammenziehung von der Größenordnung $v^2:c^2$ ist, sie die wichtigsten Glieder der elektromagnetischen Masse, d. h. die Ruhmasse ändert.

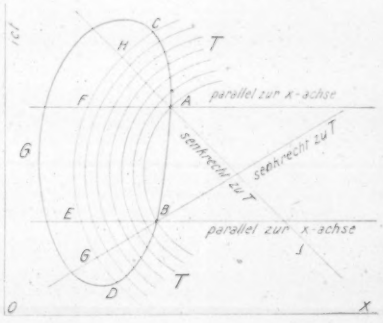
2. Betrachten wir ein System von elektrischen, von einem starren Dielektrikum zusammengehaltenen Ladungen, das unter der Wirkung eines, teils vom System selbst, teils von äußeren Ursachen herrührenden elektromagnetischen Feldes, eine Weltröhre in der Welt[2]) beschreibt. Wir nehmen weiter an, daß die Bewegung translatorisch ist, worunter wir verstehen: Wenn wir irgendein Lorentz-Einsteinsches Bezugssystem betrachten und annehmen, daß in ihm zu einem gewissen Augenblick, z. B. zur Zeit Null, ein Punkt unseres Ladungssystems ruhe, so müssen im gleichen Bezugssysteme alle Punkte des Ladungssystems zur Zeit Null ruhen. Hieraus folgt, daß die Weltlinien der Punkte unseres Systemes die orthogonalen Bahnen einer Schar linearer Räume sind; die Starrheit wird durch die Bedingung ausgedrückt, daß die Gestalt des Systems in diesen Räumen unverändert bleibt.

Um das Hamiltonsche Prinzip anwenden zu können, brauchen wir eine die Bedingung der Starrheit erfüllende Variation der Bewegung unseres Systems. Nun werden wir beweisen, daß man zu $\frac{4}{3}\frac{U}{c^2}$ oder zu $\frac{U}{c^2}$ als elektromagnetische Masse geführt wird, je nachdem man das erste oder das zweite der beiden Variationssysteme wählt, die wir im Folgenden definieren und mit den Buchstaben A und B bezeichnen werden.

Die Variation A ist jedoch, wie wir sogleich sehen werden, auszuschließen, weil sie in Widerspruch mit der Relativitätstheorie steht.

T sei die vom Systeme beschriebene Weltröhre. In der Figur haben wir den Raum eindimensional durch die X-Achse angedeutet und die Zeit t durch ict ersetzt, um eine definite Metrik zu gewinnen.

Variation A: Man betrachtet, als eine der Bedingung der Starrheit genügende Variation eine im gewöhnlichen kinematischen Sinne starre



infinitesimale zum Raume (x, y, z) parallele Verschiebung der zum gleichen Raum parallelen Querschnitte der Weltröhre. In der Figur werden wir diese Variation erhalten, indem wir alle Querschnitte $t = \text{const}$ der Röhre um willkürliche infinitesimale Strecken parallel zur X-Achse verschieben. Beschränken wir uns auf die Betrachtung der translatorischen Verschiebungen, so sind δx, δy, δz willkürliche Funktionen der Zeit und δt ist $=0$.

Variation B: Man betrachtet als eine der Bedingung der Starrheit genügende Variation eine im gewöhnlichen kinematischen Sinne starre, infinitesimale zur Weltröhre senkrechte Verschiebung der Normalschnitte der Weltröhre. In der Figur werden wir eine solche Variation erhalten, indem wir alle Normalschnitte der Röhre parallel zu sich selbst um willkürliche infinitesimale Strecken verschieben.

Um das Hamiltonsche Prinzip anwenden zu können, müssen wir unsere Variationen der

1) M. Born, Ann. d. Phys. 30, 1, 1909.

2) Wir betrachten die Welt als euklidisch, weil wir annehmen, daß die elektromagnetischen Felder, die in ihr vorkommen, nicht stark genug sind, um ihre metrische Struktur zu ändern.

weiteren Bedingung unterwerfen, an den Grenzen des willkürlichen Integrationsfeldes G zu verschwinden. Wegen dieser weiteren Bedingung zieht sich bei Anwendung des Variationssystems A das Integrationsfeld zu $ABEF$ zusammen; denn in den Feldern BDE, ACF müssen die δx, δy, δz verschwinden, weil sie für konstant $t = \text{const}$ sein müssen und an den Grenzen von G, also auf den Strecken BD, AC verschwinden. Wenden wir dagegen das Variationssystem B an, so zieht sich aus denselben Gründen das Integrationsfeld auf $ABGH$ zusammen.

Es ist nun sofort zu sehen, daß die Variation A mit der Relativitätstheorie im Widerspruch ist, weil sie keinen invarianten Charakter den Welttransformationen gegenüber besitzt und den willkürlichen Raum xyz zugrunde legt. Die Variation B besitzt dagegen den gewünschten invarianten Charakter und legt immer den Eigenraum, d. h. den zur Weltröhre senkrechten Raum zugrunde, sie ist daher zweifellos der vorigen vorzuziehen.

3. Bezeichnen wir je nach Bequemlichkeit mit (t, x, y, z) oder mit (x_0, x_1, x_2, x_3) die Raum-Zeit-Koordinaten und sei F_{ik} das elektromagnetische Feld.

Das Hamiltonsche Prinzip, daß die Maxwell-Lorentzschen, die Newtonschen und die mechanischen Gesetze zusammenfaßt, lautet[1]): Die Gesamtwirkung, d. h. die Summe der Wirkungen des elektromagnetischen Feldes, der elektrischen Ladungen, der materiellen Massen und, im Falle der allgemeinen Relativitätstheorie, des metrischen Feldes, bleibt stationär bei einer willkürlichen, den Problembedingungen genügende, und an den Grenzen des willkürlichen Integrationsfeldes „G" verschwindenden Variation der Komponenten des Viererpotentials, der Koordinaten der Punkte der von den Ladungen und den Massen beschriebenen Weltlinien und der Komponenten des metrischen Tensors.

In unserm Fall aber bleibt das metrische Feld unverändert, weil wir es als euklidisch angenommen haben, die materiellen Massen fehlen, und die einzigen zu variierenden Größen die Koordinaten der Punkte der von den Ladungen beschriebenen Weltlinien sind. Es genügt daher, die Variation der Wirkung der Ladungen $= 0$ zu setzen, d. h.:

$$\sum_{ik} \int\int de F_{ik} \delta x_i d x_k, \qquad (1)$$

wo die erste Integration über die Ladungselemente de des Systems, die zweite über die im Integrationsfelde G enthaltenen Strecken der von den de beschriebenen Weltlinien zu erstrecken ist.

Wir werden nun die Folgerungen aus den beiden Variationssystemen A und B einzeln ableiten.

4. Folgerungen der Variation A. In diesem Fall zieht sich das Integrationsfeld auf $ABEF$ zusammen. Bedeuten t_1 und t_2 die Zeiten von A und B, und bedenken wir, daß die δx_i nur von der Zeit abhängen, und daß $dt = 0$ ist, so können wir (1) schreiben:

$$\sum_{ik} \int_{t_1}^{t_2} dt \, \delta x_i \int de F_{ik} \frac{d x_k}{dt} = 0$$
$$(i = 1, 2, 3) \; (k = 0, 1, 2, 3).$$

Weil aber die $d x_i$ willkürliche Funktionen der Zeit sind, erhalten wir hieraus die drei Gleichungen:

$$\sum_{k} \int de F_{ik} \frac{d x_k}{dt} = 0,$$

d. h. wenn E und H die elektrische und die magnetische Kraft bedeuten:

$$\int \left\{ E_x + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} H_z - \frac{dz}{dt} H_y \right) \right\} de = 0$$

und die zwei entsprechenden Gleichungen für y und z.

Ist im betreffenden Augenblick die Geschwindigkeit im Bezugsysteme (t, z, y, z) des Systems gleich null, so ziehen sich die drei vorigen Gleichungen zur einzigen vektoriellen zusammen:

$$\int E de = 0. \qquad (2)$$

Zu dieser Gleichung würden wir ohne weiteres gelangt sein, wenn wir, wie es gewöhnlich bei der Ableitung der elektromagnetischen Masse geschieht und wie es im wesentlichen auch M. Born tut, von vornherein angenommen hätten, daß die Gesamtkraft auf das System gleich null ist. Wir haben Gl. (2) aber aus dem Hamiltonschen Prinzip abgeleitet, um die Quelle des Fehlers aufzuweisen. Aus (2) folgt unmittelbar $\frac{4U}{3c^2}$ als elektromagnetische Masse.

Beachten wir nämlich, daß E die Summe eines vom Systeme selbst herrührenden Anteiles E^i und eines von äußeren Ursachen herrührenden Anteiles E^e ist, so erhalten wir aus Gl. (2):

$$\int E^i de + \int E^e de = 0.$$

Andererseits zeigt entweder die direkte Berechnung oder in bekannter Weise die Betrachtung des elektromagnetischen Momentes[1]), daß:

1) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Berlin, Springer. 1921.

1) Richardson, Elektron theory of matter.

$$\int E^i \, de = -\frac{4}{3}\frac{U}{c^2} \Gamma$$

ist, wenn Γ die Beschleunigung bedeutet. Beachten wir weiter, daß $\int E^e de$ die gesamte äußere Kraft F darstellt, so finden wir:

$$F = \frac{4}{3}\frac{U}{c^2} \Gamma.$$

Ein Vergleich dieser Gleichung mit dem Grundgesetz der Punktdynamik $F = m\Gamma$ gibt uns schließlich:

$$m = \frac{4}{3}\frac{U}{c^2}.$$

5. Folgerungen der Variation B: In diesem Falle zieht sich das Integrationsfeld auf $ABGH$ zusammen. Stellen wir uns vor, daß es durch unendlich viele, der Weltröhre senkrechte Räume in unendlich dünne Schichten zerteilt ist. Für irgendeine Schicht nehmen wir weiter an, daß (t, x, y, z) das Ruhsystem ist. Dann werden für unsere Schicht $\delta t = 0$, δx, δy, δz willkürliche Konstanten sein.

Es ist außerdem: $dx = dy = dz = 0$, weil die Geschwindigkeit relativ zum Ruhsystem zur Zeit 0 verschwindet und $dt =$ der Höhe der Schicht $= d\tau\,(1 - \varkappa \times P - O)$ ist. Hier bedeutet $P - O$ den Vektor, dessen Anfangspunkt sich in dem Punkte O befindet, in dem irgendeine willkürliche aber feste Weltlinie L_0 den Raum $t = 0$ trifft, und dessen Endpunkt sich in dem Punkte P_0 befindet, in dem die vom Ladungselement de beschriebene Weltlinie L_0 den Raum $t = 0$ trifft: $\varkappa$ und $d\tau$ bedeuten die Krümmung und das in der Schicht enthaltene Element der Weltlinie L_0, $\times$ endlich bedeutet das skalare Produkt. Der von unserer Schicht herrührende Beitrag zum Integrale (1) wird daher:

$$\int de \left\{F_{10}\delta x + F_{20}\delta y + F_{30}\delta z\right\} (1 - \varkappa \times P - O)\, d\tau.$$

Ist nun Γ die Beschleunigung, so ist:

$$\varkappa = -\frac{\Gamma}{c^2}.$$

Bedenken wir außerdem, daß bei der Integration nach de die δx, δy, δz und $\delta\tau$ als konstant angesehen werden können, so finden wir für das vorige Integral:

$$-d\tau\left[\delta x \int E_x \left(1 + \frac{\Gamma \times P - O}{c^2}\right) de + \right.$$
$$+ \delta y \int E_y \left(1 + \frac{\Gamma \times P - O}{c^2}\right) de + \delta z \int E_z \left(1 + \left. + \frac{\Gamma \times P - O}{c^2}\right) de\right].$$

Dieser Ausdruck muß für alle möglichen Werte der δx, δy, δz verschwinden. Daher erhalten wir drei Gleichungen, die sich in eine einzige vektorielle zusammenziehen lassen:

$$\int E \left(1 + \frac{\Gamma \times P - O}{c^2}\right) de = 0. \qquad (3)$$

Diese Gleichung tritt an die Stelle von (2) und ergibt für die elektromagnetische Masse den Wert $\frac{U}{c^2}$. Setzen wir nämlich in (3) $E^{(i)} + E^{(e)}$ statt E, so finden wir:

$$\int E^{(e)} de + \int E^{(i)} \frac{\Gamma \times P - O}{c^2} de + $$
$$+ \int E^{(e)} de + \int E^i \frac{\Gamma \times P - O}{c^2} de,$$

oder weil, wie vorher gefunden ist:

$$\int E^{(i)} de = -\frac{4}{3}\frac{U}{c^2}\Gamma,$$
$$\int E^{(e)} de + \int E^{(i)} \frac{\Gamma \times P - O}{c^2} de - \frac{4}{3}\frac{U}{c^2}\Gamma +$$
$$+ \int E^i \frac{\Gamma \times P - O}{c^2} de = 0.$$

Hieraus folgt zunächst, daß $E^{(e)}$ von der Größenordnung von Γ ist. Vernachlässigen wir die Glieder, die Γ^2 enthalten, so können wir das zweite Integral vernachlässigen und finden, wenn wir wie vorhin $\int E^{(e)} de = F$ setzen:

$$F - \frac{4}{3}\frac{U}{c^2}\Gamma + \int E^i \frac{\Gamma \times P - O}{c^2} de = 0. \qquad (4)$$

Um das letzte Integral zu berechnen, bedenken wir, daß $E^{(i)}$ gleich der Summe von der Coulombschen Kraft:

$$\int \frac{P - P'}{r^3} de$$

ist (wo P den Aufpunkt, P' den Quellpunkt mit der Ladung de' und r die Entfernung PP' bedeutet) und einer Kraft von der Größenordnung Γ. Diese letztgenannte würde nur Glieder von der Größenordnung Γ^2 geben, die wir vernachlässigen. Das letzte Integral in (4) wird dadurch:

$$\frac{1}{c^2}\iint \frac{P - P'}{r^3} (\Gamma \times P - O)\, de\, de'.$$

Vertauschen wir, wodurch sich das Integral nicht verändert, P und P' und nehmen dann arithmetische Mittel der zwei so erhaltenen Werte, so finden wir:

$$\frac{1}{2c^2}\iint \frac{P - P'}{r^3} (\Gamma \times P - P')\, de\, de'. \qquad (5)$$

Die x-Komponente dieses Ausdruckes ist:

$$\frac{1}{2c^2}\iint \frac{x - x'}{r^3} \left\{\Gamma_x (x - x') + \Gamma_y (y - y') + \Gamma_z (z - z')\right\} de\, de'.$$

Im Falle der sphärischen Symmetrie können aber die Integrale:

$$\int\int \frac{(x-x')^2}{r^3}\,de\,de', \int\int \frac{(x-x')(y-y)}{r^3}\,de\,de',$$

$$\int\int \frac{(x-x')(z-z')}{r^3}\,de\,de'$$

ohne weiteres berechnet werden, wenn man bedenkt, daß man die Ausdrücke:

$$(x-x')^2,\ (x-x')(y-y'),\ (x-x')(z-z')$$

durch ihren Mittelwert für alle Richtungen von PP' ersetzen kann; diese Mittelwerte sind $\frac{1}{3}r^2$, o, o. Dadurch werden die drei Integrale:

$$\frac{1}{3}\int \frac{de\,de'}{r} = \frac{2}{3}U,\ o,\ o$$

und die x-Komponente von (5):

$$\frac{1}{3}\frac{U}{c^2}\Gamma_x,$$

d. h. das Integral (5) wird:

$$\frac{1}{3}\frac{U}{c^2}\Gamma.$$

Setzt man diesen Wert in (4), so findet man:

$$F = \frac{U}{c^2}\Gamma,$$

d. h. die elektromagnetische Masse $\frac{U}{c^2}$.

Pisa, Januar 1922.

(Eingegangen 9. Mai 1922.)

Zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten im elektromagnetischen Spektrum ungedämpfter Schwingungen.

Von K. Theodortschick.

Die Untersuchungen von Drude und Colley[1]) und in den letzten Jahren von Möbius[2]) und Weichmann[3]) haben gezeigt, daß im elektromagnetischen Spektrum (von den kürzesten erreichbaren bis fast meterlangen) Wellenlängen Streifen anomaler Dispersion vorhanden sind. Harms[4]) beobachtete anomale Absorption sogar bei Wellenlängen von 10 und mehr Metern. Es bot daher ein gewisses Interesse dar, das Gebiet noch längerer Wellen zu untersuchen, welche Untersuchung für Amyl- und Isobutylalkohol im Wellenlängenbereiche von 26 m bis 182 m unternommen wurde.

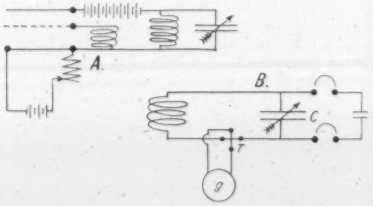
Zur Messung der Dielektrizitätskonstanten wurde die Resonanzmethode angewandt. Der Meßkondensator C_0 konnte dem geeichten Kondensator C eines Thomsonschen Resonanzkreises parallel geschaltet werden. Die Verminderung der Kapazität dieses Kondensators, die für die Wiederherstellung der durch die Anschaltung des Meßkondensators gestörter Resonanz nötig ist, mißt die Kapazität des angeschalteten Systems. Die Dielektrizitätskonstante wurde in üblicher Weise[1]) aus drei Kapazitätsmessungen nach der Formel

$$E = 1 + (E_1 - 1)\frac{C_2 - C_0}{C_1 - C_0}$$

berechnet, wo gilt

C_0 Kapazität des leeren Meßkondensators,
C_1 Kapazität desselben Kondensators, angefüllt mit einer Flüssigkeit bekannter Dielektrizitätkonstante E_1 (Toluol),
C_2 Kapazität desselben Kondensators mit der untersuchten Flüssigkeit (Dielektrizitätskonstante E).

Die Schwingungen wurden erzeugt von einem Elektronenröhrengenerator (französische Verstärkerröhre). Die Heizung besorgten drei Akkumulatoren (ca. 80 AH); die Hochspannung eine Batterie von kleinen Akkumulatoren (80 Volt). Das Schema der Schaltung ist aus der Fig. 1



ersichtlich, wo bedeuten: A Generator, B Meßresonanzkreis, C geeichter Hauptkondensator, C_0 Meßkondensator, T Thermoelement[2]) und G Galvanometer. Angewandt wurden flache Nernstsche Kondensatoren mit Glasplatten. Zum Hauptkondensator C wurde ein Kondensator gewählt, dessen Eichkurve fast geradlinig verlief. Die Selbstinduktionsspulen wurden aus Emailledrahtlitze angefertigt. Beim Übergang zur neuen Wellenlänge wurden die Spulen im Resonanzkreis gewechselt, so daß seine Kapazität bei allen Wellenlängen fast unverändert

1) A. Colley, diese Zeitschr. **10**, 471, 657, 1909; **11**, 324, 1910.
2) M. Möbius, Ann. d. Phys. **62**, 293, 1920.
3) K. Weichmann, diese Zeitschr. **22**, 535, 1921.
4) F. Harms, Ann. d. Phys. **5**, 565, 1901.

1) W. Nernst, Zeitschr. phys. Chem. **14**, 622, 1894.
2) Es erwies sich vorteilhafter, dieses bei den Messungen direkt in den Resonanzkreis zu bringen.

Tabelle I.

Destilliertes Wasser $\sigma = 2{,}10^{-5}$ Ohm^{-1} cm^{-1},
$T = 14^0$ C. $\lambda = 100$ m.

	Beobachtungen 1 mm	Beobachtungen 2 mm	Resonanzpunkt	C_2'	$C_2 = 175 + C_2'$	Anmerkung
○	32,7	43,9	38,3			Beim Anschließen von C_0 mit Wasser wurde die Kapazität = 175 mm Glasplatte des Hauptkondensators abgetrennt.
+	05,8	110,0	87,9	49,6	224,6	
○	32,5	44,2	38,3			
+	07,0	110,0	88,5	50,2	225,2	

Mittel $C_2 = 224{,}9$

$$E_{H_2O} = 1 + 1{,}40\,\frac{224{,}9 - 7{,}34}{11{,}19 - 7{,}34} = 80{,}2.$$

blieb. Der Meßkondensator war zylinderartig und hing auf den Zuleitungsdrähten in einer Eprouvette; daselbst befand sich auch das Thermometer.

Da das Maximum der Resonanzkurve ziemlich flach ist, so wurden zur genauen Bestimmung des Resonanzpunktes immer zwei Stellungen der Glasplatte nahe der Resonanzstellung auf beiden Seiten derselben bestimmt, wo das Galvanometer gleiche Ausschläge ergab; als Resonanzpunkt galt dann das arithmetische Mittel beider Stellungen. Die Reinheit der Resonanzkurve und die Konstanz der Schwingungen machen diese Methode sehr bequem und genau. Die Eichung des Hauptkondensators wurde folgendermaßen ausgeführt: es wurde die Wellenlänge bestimmt, bei welcher die Resonanz bei fast gänzlich eingeschobener Glasplatte des Hauptkondensators C eintrat. Darauf wurde der leere Meßkondensator C_0 angeschlossen und neue Resonanzstellung bestimmt. Dann wurde C_0 abgeschlossen und die Resonanz durch entsprechende Verminderung der Generatorwellenlänge wiederhergestellt. In dieser Weise fortfahrend, konnte man die ganze Skala des Hauptkondensators C in Teile gleicher Kapazität teilen. Das so hergestellte Diagramm erwies sich fast linear (Abweichungen weniger als 2 Proz.); infolgedessen bei allen Bestimmungen von E wurde der Kapazitätswert des Meßkondensators $C_0 = 7{,}34$ mm der Glasplatte angenommen, was sich als Mittel aller Eichmessungen im ganzen Skalenbereich ergab. Auf dieselbe Weise wurde die Kapazität des Meßkondensators mit Toluol (Eichflüssigkeit mit bekannter D-Konstante E_1) bestimmt. Für C_1 ergab sich: $C_1 = 11{,}19$ mm Glasplatte. Als absoluter Wert der Kapazität einer Millimeterglasplatte ergab sich aus dem Vergleich mit einem Etalon 1,04 cm.

Für die D-Konstante der Eichflüssigkeit (Toluol) war der Wert $E_1 = 2{,}40$ bei 15^0 angenommen[1]). Die Messungen nach der absoluten Methode von Nernst[1]) ergaben innerhalb der Meßfehler denselben Wert. Schon die ersten Versuche zeigten, daß die gewählte Methode auch die Absorption der Füllflüssigkeit qualitativ zu schätzen erlaubt, da sich die Absorption in der Verminderung der Resonanzamplitude bei der Anschließung des mit Flüssigkeit gefüllten Meßkondensators äußert. Dabei ergab sich Toluol als gänzlich durchlässig. Amyl- und Isobutylalkohol absorbierten 20 bis 50 Proz. der Energie je nach der Wellenlänge.

Es war interessant zu prüfen, wie weit man die Absorption steigern kann, ohne dabei die Meßwerte für E zu beeinflussen. Zu diesem Zweck wurde die D-Konstante des Wassers (Leitfähigkeit $\sigma = 2{,}10^{-5}$ Ohm^{-1} cm^{-1}) gemessen, welches ca. 90 Proz. der Energie absorbierte. In der Tabelle I sind die diesbezüglichen Resultate angegeben.

Das Zeichen ○ bedeutet Messungen ohne Anschließen des Meßkondensators, + — mit angeschlossenem Meßkondensator mit Wasser.

Tabelle I zeigt, daß sogar eine so große Absorption die Messungen nicht stört und augenscheinlich das Resultat nicht merklich verändert.

Amyl- und Isobutylalkohol wurden im Intervall von 182 m bis 26 m untersucht. Die Wellenlängen wurden mittels eines Wellenmessers mit Schleifkontakt (Skala von 400 m bis 20 m), der von mir und B. Wwedensky konstruiert wurde, gemessen. Tabelle II gibt ein Beispiel des Protokolls der Messungen bei $\lambda = 38$ m.

Tabelle II erlaubt auch die Schätzung der Resonanzbestimmungen.

In der Tabelle III sind die Resultate, erhalten für die untersuchten Alkohole, angeführt, sowie die Werte der D-Konstanten, erhalten von anderen Beobachtern, angegeben.

1) K. Tangl, Ann. d. Phys. 10, 748, 1903.

1) W. Nernst, l. c.

Tabelle II.

Wellenlänge $\lambda = 38$ m.

Amylalkohol						Isobutylalkohol					
Temperatur		Messungen 1.	Messungen 2.	Resonanzpunkt	C_2	Temperatur		Messungen 1.	Messungen 2.	Resonanzpunkt	C_2
	○	24,3	28,8	26,55			○	24,4	28,4	26,40	
16,5	+	68,3	76,7	72,50	45,95	14,2	+	77,4	86,35	81,87	55,47
	○	24,2	28,8	26,50			○	23,5	29,3	26,40	
16,6	+	68,6	76,4	72,50	46,00	14,2	+	77,7	86,0	81,85	55,45
	○	23,9	29,0	26,45							
16,7	+	68,9	75,9	72,40	45,95						
				Mittel $C_2 = 45,97$						Mittel $C_2 = 55,46$	

Tabelle III.

Wellenlänge λ m	Amylalkohol C_2	Amylalkohol T	Amylalkohol E_T	Amylalkohol E_{15}	Isobutylalkohol C_2	Isobutylalkohol T	Isobutylalkohol E_T	Isobutylalkohol E_{15}
∞	Nernst	18,9	15,95	—	—	—	—	—
∞	Landolt und Jahn	13,8	16,67	—	Landolt und Jahn	14,2	18,74	—
182	45,85	16,8	15,0	15,21	55,16	14,8	18,39	18,37
148	46,35	15,5	15,18	15,24	55,0	16,1	18,33	18,45
132	46,00	16,0	15,07	15,26	55,12	15,0	18,37	18,37
114	46,65	14,2	15,30	15,20	55,31	14,9	18,44	18,43
100	45,94	16,2	15,06	15,20	54,88	16,5	18,29	18,45
75	46,30	15,7	15,17	15,26	55,10	15,4	18,37	18,41
54	46,16	16,0	15,13	15,25	54,90	16,1	18,29	18,41
38	45,97	16,6	15,06	15,25	55,46	14,2	18,46	18,37
30	46,10	15,6	15,10	15,17	55,20	15,5	18,40	18,46
26	45,90	15,7	15,05	15,13	55,45	14,3	18,46	18,38
12	Drude	18	14,3	—	—	—	—	—
2	„	18	10,8	—	—	—	—	—
0,75	„	18	5,51	—	—	—	—	—
0,73	—	—	—	—	Drude	18	6,09	—

Die Werte der D-Konstanten wurden für 15° C folgendermaßen umgerechnet:

für Amylalkohol nach der Formel[1])

$$E_t = E_{15} - 0{,}1179\ (t - 15),$$

für Isobutylalkohol nach der Formel[2])

$$E_t = E_{15} - 0{,}11\ (t - 15).$$

Zusammenfassung.

1. Die Resonanzmethode mit einem Röhrengenerator ist für die Messung der Dielektrizitätskonstanten im Bereiche langer elektromagnetischer Wellen sehr geeignet und erlaubt eine qualitative Schätzung der Absorption.

2. Eine Leitfähigkeit von der Ordnung $\sigma = 2{,}10^{-5}$ Ohm^{-1} cm^{-1} stört die Messung nicht.

3. Die Dielektrizitätskonstanten von Amyl- und Isobutylalkohol hängen im Wellenlängenbereich von 182 m bis 26 m von der Wellenlänge nicht ab.

1) F. Ratz, Zeitschr. f. phys. Chem. **19**, 100, 1869.
2) Interpoliert zwischen E_{+16} und $E_{-21,3}$ nach R. Abegg und Seitz, Zeitschr. f. phys. Chem. **29**, 213, 1899.

Ich spreche meinen herzlichen Dank aus Herrn Prof. W. Romanoff für die Anregung zu dieser Arbeit und für sein Interesse bei ihrer Ausführung.

Moskau, Physikalisch-Technisches Reichsinstitut, Dezember 1921.

(Eingegangen 12. Juni 1922.)

Bemerkung zu dem Aufsatz: „Magnetische Permeabilität eines künstlichen magnetischen Mediums, von Alex. Goldhammer" (diese Zeitschr. 23, 247, 1922).

Von H. Maurer.

In der Arbeit wird die Permeabilität μ eines Körpers, der aus Stahlkugeln mit Ebonitzwischenlagen in einem Glasrohr aufgebaut ist, experimentell bestimmt und geprüft, wie sie mit dem aus der Poissonschen Formel

$$\mu' = \frac{\mu_0(1+2g)+2-2g}{\mu_0(1-g)+2+g}$$

berechneten Wert stimmt, wo μ_0 die Permeabilität des verwendeten Stahls selbst und $g = 0{,}3291$ das Verhältnis seines Volumens zum Gesamtvolum des Körpers bedeutet. Der aus allen Versuchen bei 5 Feldstärken zwischen $H = 18{,}8$ und 341 Gauß gemittelte beobachtete Wert $\mu = 2{,}40$ stimmt mit dem aus einem angenommenen mittleren Wert $\mu_0 = 70$ nach Poisson berechneten Wert $\mu' = 2{,}38$ bis auf 1 Proz. überein. Berechnet man aber aus dem mitgeteilten Material für die einzelnen Feldstärken H die Werte, so findet man, wenn man die zum Vergleich herangezogene, in Landolts Tabellen angegebene Stahlsorte zugrunde legt, Folgendes:

H in Gauß		18,8	100,0	163 0	222,0	341,0
μ_0 nach Landolts Tabellen[1])		55	98	75	59	42
μ', berechnet aus μ_0		2,359	2,407	2,388	2,366	2,327
μ beob.[2])	Mittel .	2,393	2,398	2,402	2,409	2,413
	Max. .	2,404	2,412	2,410	2,426	2,440
	Min. .	2,385	2,386	2,389	2,395	2,375

Während also bei Wachstum von H von 100 auf 341 Gauß mit dem kräftig abnehmenden μ_0 auch die berechnete Permeabilität μ' über 3 Proz. abnimmt, wächst der beobachtete Wert μ von 2,398 auf 2,413. Herr Goldhammer schreibt darüber: „Wächst aber das magnetische Feld, so ergibt sich dabei ein wenn auch kleiner, so doch merklicher Zuwachs von μ.“ Eine solche Änderung von μ haben M. und H. A. Wilson nicht bemerkt, obgleich sie mit der Stromstärke bis auf 15 Amp. gehen konnten [$H = 341$ Gauß entsprach 10,9 Amp.] — da die gefundene Änderung schon fast an die Grenzen der Beobachtungsfehler fällt, so möge die Frage über die Ursachen dieser Erscheinung dahingestellt bleiben“.

In Wirklichkeit dürfte es ausgeschlossen sein, daß in diesem Intervall im vorliegenden Falle mit wachsender Feldstärke die Permeabilität des Konglomerats zunimmt, während diejenige der eingelagerten magnetisierbaren Kugeln abnimmt. In der Tat befinden wir uns hier an der Grenze der Beobachtungsfehler, wie die in vorstehender Tabelle wiedergegebenen Höchst- und Tiefstwerte der je 12 bis 15 Beobachtungen zeigen, aus denen jedes μ-Mittel gemittelt ist. Die Schwankung der einzelnen μ-Werte bei konstantem H ist gleich und größer als jene der gemittelten μ-Werte im ganzen Intervall von H, bei $H = 341$ sogar 3 mal so groß. Vielleicht liegt aber außerdem ein systematischer Fehler vor, der bei steigendem H zu starkes Wachsen der μ-Werte vortäuscht. Ob die starke Temperaturzunahme, die die Ausdehnung der Versuche auf höhere H-Werte ausschloß, so gewirkt haben kann, steht dahin.

Zu bedenken dürfte aber auch sein, daß die Permeabilität der Stahlsorten recht verschieden sein kann. Es ist fraglich, ob man die aus Landolts Tabellen entnommenen Zahlen, die einem vor mehr als 13 Jahren in der Physikal. Technischen Reichsanstalt in Berlin untersuchten Stahl von bestimmter Zusammensetzung und Behandlung entsprechen, für die in Kasan 1921 verwendeten Fahrradkugeln gelten lassen kann. So hat z. B. nach Landolts Tabellen μ für 2 gehärtete Stahlsorten folgende Werte:

Prozentgehalte					$H =$			
C	Si	Mn	P	S	20	50	100	150
0,99	0,10	0,40	0,04	0,07	56	86	98	78
0,56	0,18	0,29	0,08	0,04	75	163	138	102

Um für solche Fragen eine zuverlässige Vergleichung der beobachteten und berechneten Permeabilitäten durchführen zu können, müßte man wohl auch die Permeabilität des verwendeten Stahlmaterials selbst experimentell bestimmen. Man könnte etwa dazu einen Stahlzylinder benutzen, der zuerst als Ganzes magnetisch untersucht und dann in kleine gleich große Stücke zerschnitten wird, aus denen mit unmagnetischen Zwischenplatten das künstliche magnetische Medium aufgebaut wird.

Berlin, Juli 1922.

(Eingegangen 15. Juli 1922.)

1) Die Zahlen sind graphisch interpoliert. Bei Goldhammer, S. 251 steht zu $H = 500$ statt $\mu_0 = 30{,}8$ durch einen Druckfehler $\mu_0 = 36{,}8$.

2) Die Zahlen sind der Goldhammerschen Tabelle IV entnommen, aber alle um 0,045 vergrößert, um die Wirkung der entmagnetisierenden Kraft zu berücksichtigen.

Das elektrische Feld des Transformators.

Von Fritz Emde.

Bei der Behandlung des Transformators pflegt man sich mit der Berechnung der in den Wicklungen „induzierten elektromotorischen Kräfte“ zu begnügen und auf eine deutliche Vorstellung von dem elektrischen Feld zu verzichten. Hier wollen wir den Induktionsvorgang etwas mehr in seinen Einzelheiten beschreiben.

Die unmittelbare elektrische Folge der Schwankungen des magnetischen Feldes sind

die Wirbelströme in den Eisenblechen, aus denen der Eisenkern zusammengesetzt ist. Die Wirbelströme fließen senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien und im wesentlichen parallel zu den Blechebenen. Die Stromdichte der Wirbelströme in einem Blech ist antisymmetrisch zur Mittelebene des Blechs verteilt und dem Abstand von dieser Mittelebene proportional, da bei den gewöhnlichen Blechdicken und bei der geringen Frequenz das magnetische Feld im Blechquerschnitt gleichförmig verteilt ist. Wir wollen dies in Formeln fassen. Dazu legen wir den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsenkreuzes in die Mitte eines Blechs, die z-Achse parallel zu den magnetischen Kraftlinien (also parallel zur Längserstreckung des Blechs), die x-Achse parallel zur Blechoberfläche, die y-Achse senkrecht dazu (Fig. 1. Die z-Achse

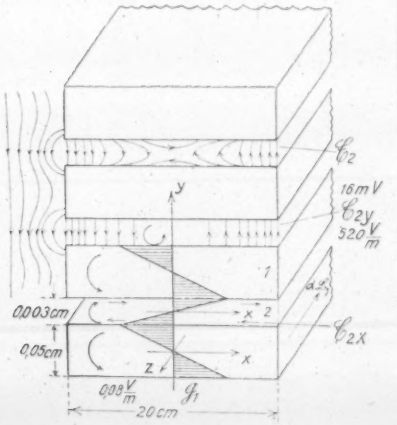


Fig. 1.

ist auf den Beschauer zu gerichtet.) Abgesehen von der Nähe der Blechränder, können wir die Stromdichte G_{1x} parallel zu der x-Achse annehmen. Bedeutet ϱ den spezifischen Widerstand des Eisens, B_{1z} die magnetische Induktion und t die Zeit, so muß nach dem Induktionsgesetz

$$\varrho \frac{\partial G_{1x}}{\partial y} = \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \qquad (1)$$

sein. Wenn wir also

$$B_{1z} = -B_0 \sin \omega t \qquad (2)$$

annehmen, so ist die elektrische Feldstärke im Eisen

$$\varrho G_{1x} = y \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} = -B_0 \omega y \cos \omega t. \qquad (3)$$

Die Amplitude B_0 der magnetischen Induktion ist gewöhnlich[1]) von der Größenordnung

$$10^4 \text{ Gauß} = 10^{-4} \text{ Volt sec/cm}^2.$$

Die in den deutschen Kraftwerken gebräuchliche Frequenz beträgt 50 Perioden in der Sekunde ($= \omega/2\pi$). Die Amplitude des elektrischen Wirbels (d. h. der Queränderung der elektrischen Feldstärke auf der Längeneinheit) ist daher

$$\omega B_0 = 314 \times 10^{-4} = 0{,}0314 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}^2}.$$

Das ist also eine der Größenordnung nach feststehende Zahl. Die Amplitude der elektrischen Feldstärke hat ihren größten Wert an der Blechoberfläche. Bei 0,5 mm Blechstärke[1]) beträgt dieser größte Wert

$$0{,}0314 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}^2} \times 0{,}025 \text{ cm} \approx 0{,}0008 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}} = 0{,}08 \frac{\text{Volt}}{\text{m}},$$

und bei einem spezifischen Widerstande des Eisens

$$\varrho = 0{,}1 \text{ Ohm} \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

die entsprechende Stromdichte 0,8 Amp/mm². Je geringer die Blechstärke ist, um so kleiner fällt dieses Maximum aus und um so kleiner werden die Verluste durch Stromwärme. („Den Wirbelströmen werden durch die Unterteilung des Eisens die Bahnen abgeschnitten".)

Nachdem so das elektromagnetische Feld in den Eisenblechen beschrieben ist, wenden wir uns dem Feld in den Papierzwischenlagen zu. Sowohl das elektrische, wie das magnetische Feld im Papier muß sich wirbelfrei an das im Eisen anschließen. Bezeichnen wir die Blechstärke mit a, so haben wir in (3) $y = a/2$ zu setzen und bekommen als Oberflächenwerte

$$\varrho G_{1x} = \frac{a}{2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} = E_{2x}.$$

An der gegenüberliegenden Oberfläche des nächsten Blechs muß die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}_{2x}$ den entgegengesetzt gleichen Wert haben. Den Übergang von dem einen Wert in den andern können wir in der dünnen Papierschicht mit großer Genauigkeit als linear annehmen, also wenn wir den Anfangspunkt nach der Papiermitte verlegen,

$$\mathfrak{E}_{2x} = -i \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \frac{a}{p} y = i B_0 \omega \frac{a}{p} y \cos \omega t. \qquad (4)$$

1) Siehe z. B. Vidmar, Transformatoren (1921 bei Springer), S. 23.

wo p die Papierdicke bedeutet ($\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen). Hieraus

$$\text{rot}\,\mathfrak{E}_{2z} = [\nabla\,\mathfrak{E}_{2x}] = -\mathfrak{k}\frac{\partial E_{2x}}{\partial y} = +\mathfrak{k}\frac{\partial B_{1z}}{\partial t}\frac{a}{p}. \tag{5}$$

Nehmen wir die Papierdicke $p = 0{,}03$ mm an[2]), so wird $a/p \approx 17$, d. h. wir bekommen einen 17 mal so starken elektrischen Wirbel im Papier, wie im Eisenblech. Dann müßten wir nach dem Induktionsgesetz im Papier auch eine 17 mal so starke magnetische Induktion haben. Bei einer Induktion von 10000 Gauß ist die magnetische Feldstärke im Eisen von der Größenordnung 5 Amp/cm, und wegen des wirbelfreien Übergangs muß sie ebenso groß im Papier sein. Dann ist aber die magnetische Induktion im Papier so klein, daß wir sie ganz vernachlässigen können. Folglich muß nach dem Induktionsgesetz das elektrische Feld im Papier wirbelfrei sein. Der starke elektrische Wirbel des elektrischen Längsfeldes $\mathfrak{E}_{2x}$ muß aufgehoben werden durch einen entgegengesetzt gleichen eines elektrischen Querfeldes $\mathfrak{E}_{2y}$:

$$\text{rot}\,\mathfrak{E}_{2y} = [\nabla\,\mathfrak{E}_{2y}] = \mathfrak{k}\frac{\partial E_{2y}}{\partial x} = -\mathfrak{k}\frac{\partial B_{1z}}{\partial t}\frac{a}{p}, \tag{6}$$

daher

$$\mathfrak{E}_{2y} = -\mathfrak{j}\frac{\partial B_{1z}}{\partial t}\frac{a}{p}x = \mathfrak{j}B_0\omega\frac{a}{p}x\cos\omega t. \tag{7}$$

Das Querfeld ist antisymmetrisch zur Mitte der Blechbreite verteilt. Nehmen wir die Blechbreite $b = 20$ cm an, so bekommen wir als Querfeldamplitude im Papier nahe am Blechrand

$$\omega B_0\frac{a}{p}\frac{b}{2} = 0{,}0314\ \frac{\text{Volt}}{\text{cm}^2} \times \frac{0{,}05\text{ cm}}{0{,}003\text{ cm}} \times \frac{20}{2}\text{ cm} = 5{,}2\ \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}.$$

Mithin ist hier die Amplitude der elektrischen Spannung zwischen zwei Blechen

$$5{,}2\ \text{Volt/cm} \times 0{,}003\text{ cm} = 16\text{ Millivolt}.$$

Die Feldstärke von 520 Volt/m am Rande des Blechzwischenraumes ist 6500 mal so groß wie die Feldstärke von 0,08 Volt/m im Eisen.

Das elektrische Gesamtfeld im Papier ist

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_{2x} + \mathfrak{E}_{2y} = -\frac{a}{p}(\mathfrak{i}y + \mathfrak{j}x)\frac{\partial B_{1z}}{\partial t}. \tag{8}$$

Es läßt sich aus einem komplexen Potential

$$\varphi + i\psi = \frac{a}{p}\frac{(x+iy)^2}{2i}\frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \tag{9}$$

ableiten, d. h. das gewöhnliche Potential ist

$$\varphi = \frac{a}{p}xy\frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \quad (\text{und } \mathfrak{E}_z = -\nabla\varphi) \tag{10}$$

und die Stromfunktion

$$\psi = \frac{a}{p}\frac{y^2 - x^2}{2}\frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \quad (\text{und } \mathfrak{E}_z = [\nabla\psi]). \tag{11}$$

Die elektrischen Kraftlinien im Papier

$$y^2 - x^2 = \text{konst}$$

(siehe Figur) und die Äquipotentiallinien ($xy = \text{konst}$) sind gleichseitige Hyperbeln (in Fig. 1 verzerrt gezeichnet).

An der Oberfläche des Blechpakets setzt sich das elektrische Feld in den Außenraum fort. Nehmen wir zunächst an, daß sich in der Umgebung keine das elektrische Feld störenden Körper befinden. Dann laufen die elektrischen Kraftlinien im wesentlichen parallel zur Oberfläche des Blechpakets. An den von den Blechkanten gebildeten Oberflächenseiten ist das elektrische Feld, wie wir gesehen haben, viel stärker als an den zu den Blechebenen parallelen Oberflächenseiten. Sind beispielsweise 380 Bleche aufeinandergeschichtet, so bekommen wir im Außenraum einseitig eine Spannungsamplitude von $380 \times 0{,}016 = 6$ Volt, als Amplitude der Umlaufspannung also 12 Volt[1]). Weil im Außenraum die magnetische Feldstärke ebenso gering ist wie im Papier, ist das elektrische Feld im Außenraum als wirbelfrei anzusehen. Bei einer Deformation der den Eisenkern umschlingenden Kurve ändert sich die Umlaufspannung nicht. Die elektrischen Kraftlinien werden den Eisenkern umzingeln, abgesehen von den Störungen, die die vier Kanten des Kerns verursachen. Bei einem Eisenkern von Kreisquerschnitt wären die elektrischen Kraftlinien Kreise um die Kernachse, also sämtlich geschlossne Kurven.

Hieran ändert sich nicht viel, wenn wir um den Kern eine in sich geschlossne Windung legen. Die elektrische Feldstärke setzt sich wirbelfrei in das Windungsmetall hinein fort, und es entsteht ein elektrischer Strom so, daß das Produkt aus spezifischem Widerstand und Stromdichte gleich der elektrischen Feldstärke wird.

Stark verändert wird dagegen das elektrische Feld im Außenraum, wenn wir eine offne Windung um den Eisenkern legen. Dann sammeln sich auf dem Windungsanfang negative Ladungen, auf dem Windungsende positive. Ihnen gegenüber entstehen entgegengesetzte auf dem Eisenkern. Das von diesen Ladungen ausgehende Feld kommt zu dem hinzu, das aus dem Papier zwischen den Blechen hervorquillt (siehe Fig. 2). Da die elektrischen Kraftlinien auf der Windungsoberfläche senkrecht stehen,

1) Vidmar, Transformatoren, S. 19.
2) Vidmar, Transformatoren, S. 59.

1) Vidmar, Transformatoren, S. 216.

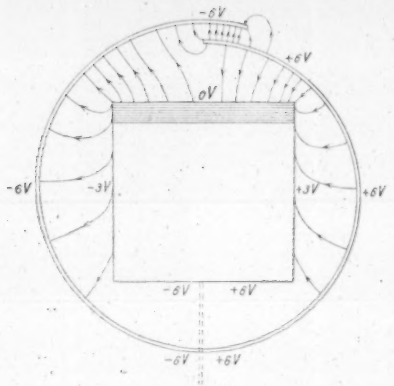


Fig. 2.

ist die Spannung entlang der Windung null. Die Spannung zwischen Windungsanfang und Windungsende ist gleich der vollen Umlaufsspannung (in unserm Beispiel 12 Volt Amplitude). Wie in jedem wirbelfreien Feld kann die elektrische Feldstärke im Außenraum als Potentialgefälle dargestellt werden. Aber das elektrische Potential ist nicht einwertig, sondern periodisch vielwertig. Die Periode ist gleich der Umlaufsspannung. In unserm Zahlenbeispiel können wir das Potential etwa so annehmen: Die erste Windungshälfte hat das Potential — 6 Volt, die zweite + 6 Volt. Die vier Seiten der Kernoberfläche haben in der Mitte dann folgende Potentiale: Gegenüber der Windungsmitte (also unten) + 6 Volt, rechts + 3 Volt, gegenüber den Windungsenden (also oben) 0 Volt, links — 3 Volt, unten — 6 Volt. Hier haben wir den Sprung von — 6 Volt auf + 6 Volt.

Einst galt nur der induzierte Strom als Beobachtungstatsache, das induzierte elektrische Feld als Vermutung, als eine Extrapolation der Theorie. In der Rechnung mußte die aus dem Vergleich mit den galvanischen Elementen entsprungne „induzierte elektromotorische Kraft" als eine Art deus ex machina in die Lücke treten[1]). Auch heute noch nehmen unsre Lehrbücher gegenüber dem induzierten elektrischen Feld eine recht zaghafte Haltung ein. Man braucht es aber nur deutlich zu beschreiben, und ist von seiner Wirklichkeit überzeugt. Wenn man es nicht beachtet, muß man überhaupt auf eine deutliche Vorstellung von dem Induktionsvorgang verzichten. An der Nichtbeachtung des induzierten elektrischen Feldes ist ja auch nur seine geringe Intensität schuld: Die Feldstärke beträgt höchstens wenige Volt/cm, während der Experimentator gewöhnt ist, mit Feldern von Tausenden von Volt/cm zu arbeiten. Fast sollte man meinen, daß die Zeit nicht mehr fern ist, wo das induzierte elektrische Feld aus der theoretischen Physik in die Experimentalphysik umzieht.

Stuttgart, Elektrotechnisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 4. Juli 1922.)

1) In diesem Zusammhang ist es bemerkenswert, daß der Ausdruck „elektromotorische Kraft" bei dem reinen Experimentator Faraday nicht vorkommt. Die „induzierten elektromotorischen Kräfte" sind 1845 von dem Theoretiker Franz Neumann eingeführt worden.

Optischer Demonstrationsversuch zum Braggschen Verfahren der Kristallanalyse.

Von Bilfried Quarder.

1. Die einfachen und durchsichtigen Überlegungen, durch die W. H. und W. L. Bragg[1]) aus der Intensitätsverteilung in den Spektren der verschiedenen Ordnung, die man durch Reflexion von homogenen Röntgenstrahlen an einer Kristallfläche erhält, Schlüsse über die Kristallstruktur ziehen konnten, bedingten den Wunsch, die Grundlagen dieser Gedankengänge im Versuch vorführen zu können. Infolge der Schwierigkeit, diese Röntgenstrahlen selbst zu demonstrieren, liegt es nahe zu versuchen, mit besonders gebauten Beugungsgittern analoge Intensitätsverteilungen bei Verwendung von sichtbarem Licht zu erhalten[2]). Wir können folgende Analogie aufstellen: Den mit Atomen verschiedener Elektronenzahl belegten und daher verschieden stark reflektierenden Kristallflächen entsprechen Gitter mit verschiedenen Strichbreiten[3]). Sehen wir von der Aufeinanderfolge identischer Striche [Ebenen] ab, so folgt im einfachsten Falle immer ein starker Strich [stark reflektierende Ebene] auf einen schwächeren [schwach reflektierende Ebene]. Den unterschiedlichen Entfernungen je zweier aufeinander folgender, verschieden stark reflektierender Kristallebenen sind dann proportionale Entfernungen je zweier verschiedener Striche zuzuordnen.

Ist die Gitterkonstante beider ineinanderliegender Gitter gleich g und die Strichbreiten a

1) W. H. Bragg and W. L. Bragg, X-Rays and Crystal Structure. 3. Aufl., 1918 oder Marx, Handbuch der Radiologie 5, 320ff.

2) Die Anregung hierzu verdanke ich Herrn Prof. Buchwald.

3) Hierbei sind unter „Strich" stets die durchsichtigen Teile eines Beugungsgitters verstanden.

bzw. b, also für das erste bzw. zweite Gitter der Bruchteil $\frac{a}{g}$ bzw. $\frac{b}{g}$ offen, so ist nach Rayleigh[1]) die im νten Spektrum vom ersten Gitter herrührende Feldstärke

$$\mathfrak{A}_\nu \sim \frac{1}{\nu\pi} \sin \frac{a}{g} \nu\pi$$

und die vom zweiten Gitter herrührende Feldstärke

$$\mathfrak{B}_\nu \sim \frac{1}{\nu\pi} \sin \frac{b}{g} \nu\pi.$$

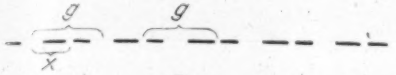


Fig. 1.

Ist die Entfernung der Mitten zweier aufeinanderfolgender verschiedener Striche gleich x, so ist der Gangunterschied zwischen den beiden vom ersten und zweiten Gitter herstammenden Strahlen im ersten Spektrum:

$$\delta_\nu = \frac{x}{g} \cdot \lambda,$$

allgemein im νten Spektrum:

$$\delta_\nu = \nu \frac{x}{g} \lambda,$$

oder im Bogenmaß:

$$\delta_\nu = 2\pi\nu \frac{x}{g}.$$

Die von dem Doppelgitter herrührende resultierende Feldstärke $\mathfrak{R}_\nu$ erhält man dann bekanntlich nach dem Gesetze der Vektoraddition, und die resultierende Intensität J_ν ist proportional dem Amplitudenquadrat:

$$\begin{aligned} J_\nu &\sim A_\nu^2 + B_\nu^2 + 2 A_\nu B_\nu \cos\delta_\nu, \\ &\sim \frac{1}{\nu^2} \left| \sin^2 \frac{a}{g} \nu\pi + \sin^2 \frac{b}{g} \nu\pi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \frac{a}{g} \nu\pi \sin \frac{b}{g} \nu\pi \cos\delta_\nu \right|. \end{aligned}$$

Für den Spezialfall, daß die Striche des einen Gitters genau in der Mitte zwischen den Strichen des anderen Gitters stehen, wird:

$$x = \frac{g}{2}$$

und hiermit:

$$\delta_\nu = \nu\pi.$$

Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} J_\nu &\sim \frac{1}{\nu^2} \left| \sin^2 \frac{a}{g} \nu\pi + \sin^2 \frac{b}{g} \nu\pi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot (-1)^\nu \sin \frac{a}{g} \nu\pi \sin \frac{b}{g} \nu\pi \right|, \end{aligned}$$

$$J_\nu \sim \frac{1}{\nu^2} \left| \sin \frac{a}{g} \nu\pi \pm \sin \frac{b}{g} \nu\pi \right|^2,$$

wobei das negative Zeichen für die Spektren ungerader, das positive für die gerader Ordnung gilt. Man sieht unmittelbar, daß die Intensitäten der Spektren ungerader Ordnung umso kleiner werden, je weniger a von b verschieden ist. Die Verhältnisse lassen sich zeichnerisch so darstellen:

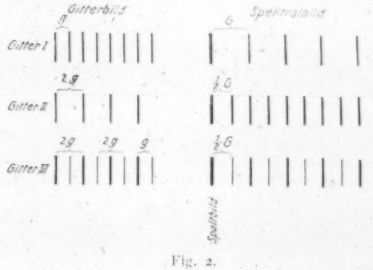


Fig. 2.

Gitter I mit der Gitterkonstanten g erzeugt Spektren, die — bei hinreichend kleinen Ablenkungswinkeln — einander in einer bestimmten gleichmäßigen Entfernung G folgen. Verdoppeln wir die Gitterkonstante auf $2g$, so haben wir unter sonst gleichen Verhältnissen Spektren in der Entfernung $\frac{1}{2}G$ [Gitter II]. Gitter III, ein Mittelding zwischen beiden Grenzfällen, liefert Spektralbilder, die dem Abstande gleichartiger Striche als Gitterkonstante entsprechen und geschwächte Spektren ungerader Ordnung zeigen.

2. Die theoretisch vorausgesetzten Gitter wurden auf photographischem Wege hergestellt. Wir beschränken uns zunächst auf den oben behandelten Spezialfall äquidistanter Striche [$x = \frac{1}{2} g$].

Mit schwarzer Tusche wurden auf weißem Karton in gleicher Entfernung bis zu 250 Striche gezogen, abwechselnd ein dicker und ein dünner, wobei zwei gleich starke Striche immer 2 mm voneinander entfernt waren. [Vielleicht ist es empfehlenswerter, das Original in etwas größerem Maßstabe zu zeichnen.] Die Aufnahmen wurden auf besonders feinkörnigen photomechanischen Platten für Schwarz-Weiß-Aufnahmen [Sigurd-Foto-Platten] hergestellt. Bei verschiedenen Verkleinerungen ergaben sich für die Gitterkonstante g Werte von 77 μ bis 131 μ. Die auf diese Weise hergestellten Gitter zeigen sehr deutlich die theoretisch zu erwartenden Abweichungen vom normalen Intensitätsabfall, wenn auch nicht genau in dem berechneten Maße. Dies ist aus den unvermeidlichen Abweichungen von den der Theorie zugrunde ge-

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 67, 81, 193, 1874; Sc. Papers I, 199.

legten Idealvoraussetzungen zu erklären. Bei einem Gitter mit einem Verhältnis der Strichdicken:

$$a : b = 53 : 50,$$

wo nach der Theorie sich verhalten sollte:

$$J_1 : J_2 : J_3 : J_4 = 106 : 99560 : 126 : 219,$$

ist sowohl subjektiv [Spektralapparat mit mattierter Glühbirne als Lichtquelle] als auch objektiv [Spalt mit heller Bogenlampe beleuchtet] in mittelgroßem Hörsaal wahrzunehmen, daß das zweite und vierte Spektrum bedeutend heller als das erste, bzw. dritte Spektrum sind. Dies tritt besonders deutlich hervor, wenn zum Vergleich Gitter II und III demonstriert wird.

Die an Gitter III auftretenden Intensitätsverhältnisse stellen eine Analogie dar zu den Spektren, die man durch Reflexion an der Ebene 111 von $NaCl$ oder an der Ebene 100 von ZnS erhält. Hier folgen nämlich in gleichem Abstande Ebenen aufeinander, die entweder nur Na- und nur Cl-Atome oder nur Zn- und nur S-Atome enthalten.

Auch die in der theoretischen Ableitung allgemein gemachte Annahme von beliebigem δ, läßt sich experimentell verwirklichen. Hierzu wurde ein Apparat gebaut, der es gestattete, zwei normale Gitter von der gleichen Gitterkonstanten g, bei denen aber die durchsichtigen Teile bedeutend breiter als die undurchsichtigen waren, mit aufeinandergelegten Schichtseiten zunächst genau strichparallel zu stellen und dann senkrecht zu der Strichrichtung mikrometrisch aneinander vorbeizuschieben. Hierdurch hatte man ein Gitter, bei dem durch Verschieben das Verhältnis der Strichbreiten $a : b$, gleichzeitig aber auch die Entfernung x, kontinuierlich verändert werden konnte. Auch mit diesem Gitter konnte man subjektiv und objektiv deutlich sehen, wie sich die Intensitäten der Spektren beim Verschieben in der theoretisch zu erwartenden Weise ändern.

3. Infolge der verhältnismäßig großen Gitterkonstanten eignen sich die auf photographischem Wege hergestellten normalen Gitter noch zu einer weiteren Analogiedemonstration.

Debye und Scherrer[1]) hatten bei Versuchen über die Reflexion von Röntgenstrahlen an unregelmäßig verteilten Kristallteilchen gefunden, daß bei immer feinerer Pulverisierung die anfänglich scharfen Spektrallinien unscharf werden und sich schließlich sehr verbreitern. Da bei zunehmender Verkleinerung der Kriställchen immer weniger Ebenen hintereinander liegen, so entspricht diesen Kristallverhältnissen bei unserer Gitteranalogie der Fall, daß bei gleichbleibender Gitterkonstanten das Gitter immer schmaler wird. Läßt man im Spektralapparat auf ein Gitter mit einer Gitterkonstanten von ungefähr 100 μ Quecksilberlicht fallen, so sieht man, solange die Gesamtbreite des Gitters groß ist gegenüber der Gitterkonstanten, scharfe Spektrallinien. Wenn immer größere Teile des Gitters abgeblendet werden, so tritt bei einer Gitterbreite von ungefähr 1,0 bis 1,2 mm eine deutliche Verbreiterung der Hg-Linien ein, die bei weiterem Abblenden schließlich in ein verwaschenes kontinuierliches Lichtband übergehen. Zu diesem Versuche eignen sich die üblichen Gitter mit kleinen Gitterkonstanten nicht; man müßte sie auf einen so schmalen Streifen abblenden, daß die Intensität zu gering wird, um die Verbreiterung der Linien subjektiv erkennen zu lassen.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität, Juli 1922.

(Eingegangen 4. Juli 1922)

1) P. Debye und P. Scherrer, diese Zeitschr. 18, 291, 1917.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule München Dr. August Kühl für technische Optik.

Ernannt: Dr. R. C. Tolman zum Professor für physikalische Chemie und mathematische Physik am California Institute of Technology in Pasadena, der Privatdozent an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Friedrich Hahn zum a. o. Professor für Chemie, Professor G. A. Hulett zum ord. Professor für physikalische Chemie an der Princeton Universität, Dr. Gheorghe P. Teodorescu von der Universität Berlin zum Dozenten für analytische Chemie an der Polytechnischen Schule in Bukarest, der Professor der Chemie an der Universität Chicago Dr. Gerald L. Wendt zum Direktor der Standard Oil Co. of Indiana, der a. o. Professor an der Universität Tübingen Dr. Robert König zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Münster, der Privatdozent an der Universität Berlin Dr. A. Rademacher zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Hamburg.

Gesuche.

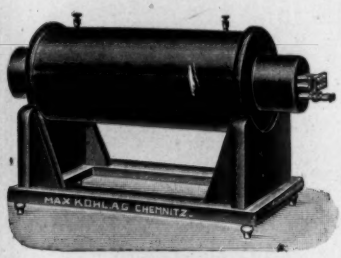
Technischer Physiker,

Dipl.-Ing., 31 jähr., unverh., bish. i. vielseit. Tätigk. i. Priv.-Industrie, selbständ. u. gewissenh. Arbeiter, m. **Neigg. u. Talent z. Forschung,** sucht Anstllg. i. **Fabrik-, Forschungs- od. Hochschullaboratorium,** am liebst. f. **prakt. Luftelektrizität u. einschläg. Gebiete.** — Sehr g. Kenntn. i. Elektrotechn., Math. (höh.) u. allen Zweigen d. Physik. — Erfahrg. i. Patentw.; Sprachk. Engl. u. Frz.; Zeugn. u. Ref. vorh. — Angebote unter **S. H. 607** an den Verlag d. Physikal. Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstr. 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Erich Hückel in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 2400000.



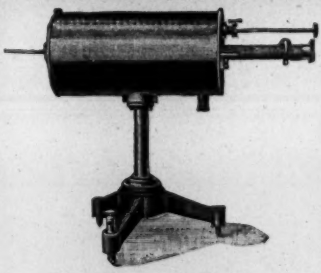
62582. Funkeninduktor mit Sekundärwicklung von geringem Widerstand, für Wehnelt-Unterbrecher, 400 mm Funkenlänge.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel

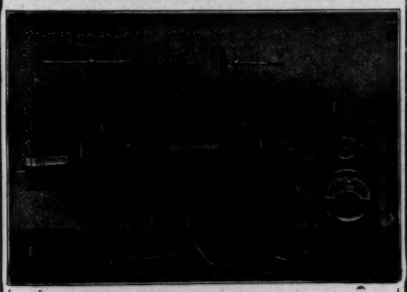
in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.



Apparate für luftelektrische und radioaktive Untersuchungen.
Normalbatterie für elektrostatische Messungen.
Kondensatoren, Mikrowage.
Erdbebenregistrierapparate.

Spindler & Hoyer G.m.b.H.
Mechan. u. opt. Werkstätten
Göttingen 3.



Induktorium

Patent Klingelfuß

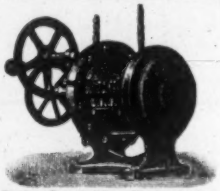
mit eingebauter Meßspule und eingeschaltetem Sklerometer und Milliampèremeter. Beide Instrumente sind spannungslos gegen Erde und können in beliebiger Entfernung vom Induktorium und der Röntgenröhre aufgestellt werden.

Fr. Klingelfuß & Co. Basel.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar

Gegründet 1890

Fabrik physikalischer, chemischer und technischer Apparate

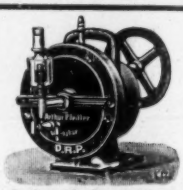


Rotier. Quecksilber-Hochvakuumpumpe System Pfeiffer. D. R. P.

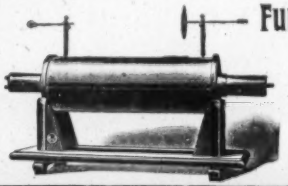
Spezialfabrik für Hochvakuumpumpen

zu wissenschaftlichen und technischen Zwecken

Alle Arten Luftpumpen, Kolben-Ölluftpumpen, rotierende Ölluftpumpen, rotierende Quecksilberluftpumpen für Betrieb und Laboratorium



Rotierende Quecksilber-Hochvakuumpumpe System Gaede. D. R. P.



Funkeninduktoren bis 1000 mm Funkenlänge

Normaltypen von 6—1000 mm Funkenlänge mit Unterbrechern aller Art

Spezial-Funkeninduktoren für technische und wissenschaftliche Zwecke

Listen kostenlos von Abteilung E verlangen.

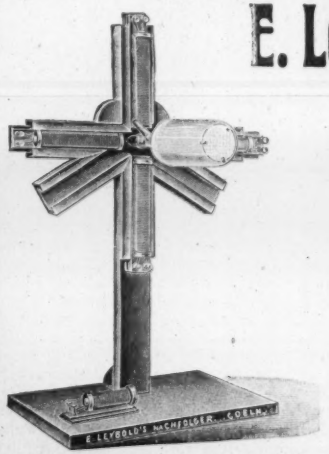
E. Leybold's Nachfolger

Cöln a/Rhein

Fabrik physikalischer Apparate

Zweigniederlassung:

Berlin NW 7, Dorotheenstraße 53



Universalstativ für Braun'sche Röhre nach Simon und Reich.

Projektionsapparate für Diaskopie und Episkopie

Hochvakuumpumpen nach Gaede

Katalog, enthaltend 16000 Nummern, wird Instituten auf Wunsch übersandt.

Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.